Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
Zavod za matematiku

Model suživota gdje jedna veličina ometa drugu

SEMINARSKI RAD

STUDIJ: Diplomski studij Primijenjena kemija

KOLEGIJ: Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

PREDMETNI NASTAVNIK:
Dr. sc. Ivica Gusić, redoviiti profesor

STUDENT:
Petar Turinski

ASISTENT:
Dr. sc. Miroslav Jerković, viši asistent

Zagreb, lipanj 2010.

SADRŽAJ

1. UVOD

„Nijedan čovjek nije otok“. Ako ovu izreku malo poopćimo, možemo reći da nijedan živi organizam nije sam na ovome svijetu, nego je barem dio svog života proveo u nekakvoj zajednici. Svaki organizam rođenjem pripada zajednici te populaciji određene vrste koja na istom staništu koegzistira s populacijama istih i drugih vrsta.

Organizmi djeluju jedni na druge, kako unutar populacije, tako i među populacijama. Međuodnosi se mogu kretati od simbiotičkog načina suživota do borbe za preživljavanje. Jednostavnija međudjelovanja mogu se modelirati pa tako i odnos među populacijama gdje jedna populacija na drugu utječe samo redukcijom broja njenih jedinki, dok ta druga populacija na prvu ne utječe uopće.

Model suživota gdje jedna vrsta ometa drugu je jednostavan matematički model koji se može koristiti u svrhu promatranja i shvaćanja kako će se razvijati i ponašati dvije skupine jedinki dviju različitih vrsta, a da su pritom na neki način izolirane od ostalih vrsta, pri čemu jedna vrsta na drugu utječe samo na način da joj smanjuje kapacitet.

2. Dinamički sustavi

U svijetu oko nas neprestano djeluju prirodni zakoni, odnosno prirodne sile koje svijet, kako vrijeme prolazi, konstantno mijenjaju. S obzirom da se svijet sastoji od mnoštva relativno velikih i malih sustava koji su podložni tim prirodnim zakonima te u skladu s time doživljavaju promjene stanja u vremenu, svi sustavi su više ili manje dinamički. Prema tome, dinamički sustavi govore o međusobnoj zavisnosti sustava varijabli i njihovim promjenama u nekom prostoru u ovisnosti o vremenu. Po svojoj prirodi dinamički sustavi nisu statični, iako i dinamički sustavi imaju svoje točke mirovanja (u kojima se vrijednosti varijabla sustava više ne mijenjaju, primjerice njihalo koje miruje u okomitom položaju, ovješeno prema dolje).

Dinamički sustavi se opisuju diferencijalnim i diferencijskim jednadžbama. Da bi se moglo predvidjeti ponašanje dinamičkog sustava za neki određeni vremenski period ili da bi se mogla proučavati povijest dinamičkog sustava, potrebno je riješiti njegovu jednadžbu. Problem je što se mnogi sustavi ne mogu zapisati pomoću jedne jednadžbe, a čak i da se mogu, ta jednadžba (ili sustav jednadžbi) najčešće nije eksplicitno rješiva. Međutim, cilj ni nije pronaći točna rješenja jednadžbi, cilj je odgovoriti na pitanja poput „Hoće li se sustav umiriti do stacionarnog stanja, a ako hoće, koja su moguća stacionarna stanja?“ ili „Ovisi li ponašanje sustava kroz duži period vremena o početnim uvjetima?“. Znači, cilj je kvalitativno opisati sustav. Važno je također opisati fiksne točke ili stacionarna stanja danog dinamičkog sustava jer su to vrijednosti varijabli koje se neće promijeniti s vremenom. Jednako tako su zanimljive i periodične točke jer su to stanja sustava koja se ponavljaju nakon određenog perioda vremena.

Pri proučavanju dinamičkih sustava važnu ulogu imaju trajektorije. Trajektorija je putanja ili orbita točke (x_0, y_0) kroz sva vremena, odnosno to je skup svih stanja (život) dinamičkog sustava.

Dinamički sustavi mogu biti linearni (jako rijetko) i nelinearni. Nelinearni dinamički sustav je onaj sustav čiji je model opisan nelinearnim jednadžbama. Jedna takva nelinearna jednadžba je eksponencijalna jednadžba od koje se manjim preinakama (uvođenje granice preko koje se varijabla ne može razvijati) dobiva logistička jednadžba, odnosno logistički model koji će se koristiti u ovom seminarskom radu za opisivanje suživota gdje jedna veličina ometa drugu.

3. Model suživota gdje jedna veličina ometa drugu

Model predstavlja situaciju gdje jedna varijabla ometa drugu varijablu pri čemu potonja ne ometa prvu, znači jedna nesimetrična situacija. Ovaj model nije jedini način kako ćemo nešto modelirati, ali je svakako jedan od najjednostavnijih nelinearnih modela.

Od varijabli imamo *x*, *y* i *t*. Ako govorimo u biološkim terminima, varijable *x* i *y* predstavljaju pojedine organizme, odnosno vrste, a *t* predstavlja vrijeme. Imamo situaciju u zatvorenom sustavu gdje varijabla *y* ne utječe na varijablu *x*. U tom sustavu, varijabla *x* se normalno razvija i jednako ponaša bez obzira postoji li varijabla *y* u sustavu ili ne postoji. Ako varijabla *y* postoji, onda varijabli *x* nije bitno koliko je varijable *y* u okolini, jednostavno varijabla *y* uopće ne utječe na varijablu *x*. Međutim, varijabla *x* ometa varijablu *y* i u biti što je varijabla *x* veća po iznosu, varijabli *y* je teže i manje je ima. U sustavu postoji neki određeni maksimum do kojeg može ići varijabla *x* i do kojeg može ići varijabla *y*. Taj maksimum predstavlja nosivi kapacitet do kojeg se svaka pojedina varijabla može razvijati.

Logistička jednadžba za razvoj varijable *x* postavlja se na sljedeći način:

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{a}x \times (1 - \frac{x}{\mathrm{K}})$$

Imamo jednu veličinu (*x*) koja se razvija u vremenu (*t*). Brzina razvoja te veličine ovisi o trenutnoj količini veličine te njenom nosivom kapacitetu (*K*). Kada nosivi kapacitet teži beskonačnosti ili ako je količina veličine jako malena, izraz *x/K* teži ka nuli. Tada se izraz u zagradi približava vrijednosti 1 što znači da je brzina razvoja veličine u tom slučaju praktički proporcionalna veličini. Zato je rast veličine eksponencijalan za male vrijednosti veličine. Pri velikim vrijednostima veličine izraz *x/K* teži vrijednosti 1 što znači da izraz u zagradi teži ka nuli pa se rast veličine eksponencijalno usporava i teži nekoj konstantnoj vrijednosti, a to je iznos nosivog kapaciteta. Drugim riječima, krivulja razvijanja opisana ovakvom jednadžbom ima sigmoidalan oblik i stupanj rasta ovisi o trenutnoj količini te veličine. Radi drugog pristupa tumačenju jednadžbe, ona se može prikazati i na sljedeći način:

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{a}x - \mathrm{a}x \times \frac{x}{\mathrm{K}}$$

Vidimo da imamo x^2. Ako je $0 < x < 1$, x^2 je još manji po iznosu te se drugi član za male vrijednosti veličine *x* praktički gubi. Koeficijent *a* predstavlja koeficijent razvoja veličine x pri malim količinama. S obzirom da se radi o razvijanju, tj. rastu veličine, $a > 0$. Bitno je naglasiti da se radi o malim količinama jer postoji ograničenje, a to je K – nosivi kapacitet za x. Kad se približavamo nosivom kapacitetu, kao što je objašnjeno maloprije, rast veličine x se usporava. To je logistički model.

Logistička jednadžba za razvoj varijable y bez prisutnosti varijable x postavlja se na isti način kao i za razvoj varijable x:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{b}y \times (1 - \frac{y}{\mathrm{L}})$$

Analogno logističkoj jednadžbi za razvoj veličine x, koeficijent b je koeficijent razvoja veličine y pri malim količinama, a L je nosivi kapacitet za veličinu y kada ne bi bilo varijable x. Međutim, ima je, i što je više ima, to više ometa razvoj veličine y pa se i kapacitet veličine y smanjuje.

Najjednostavniji model je da zamislimo da veličina x nema drugog utjecaja na veličinu y osim što joj smanjuje kapacitet. Znači, veličina y se nastavlja jednako ponašati, a veličina x ne utječe na nju nikako drugačije osim tako što veličine y ne može biti onoliko koliko bi je bilo kad ne bi bilo veličine x. Prema tome, korekcije u gornjim jednadžbama uvodimo samo kod nosivog kapaciteta i to tako da se on umanjuje za neku funkciju od x, $f(x)$.

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{b}y \times (1 - \frac{y}{\mathrm{L} - f(x)})$$

Najjednostavniji model bio bi kod pretpostavke da se kapacitet veličine y linearno smanjuje s povećanjem veličine x i to u slučaju kad je $f(x) = x$. Međutim, to implicira da povećanje veličine x za 1 znači smanjenje veličine y za 1, a to nije skroz realno pa je bolje napisati $f(x) = cx$ pri čemu c označava neku konstantu što u prijevodu znači da neka jedinka x može ometati dvije, tri ili više jedinki y.

Kad se ove korekcije uzmu u obzir, gornja jednadžba poprima sljedeći oblik:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{b}y \times (1 - \frac{y}{\mathrm{L} - \mathrm{c}\,x})$$

Sustav logističkih jednadžbi za razvoj pojedinih varijabli

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{a}x \times (1 - \frac{x}{\mathrm{K}})$$

i

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{b}y \times (1 - \frac{y}{\mathrm{L} - \mathrm{c}\ x})$$

nelinearan je što znači da egzaktno rješavanje nije izgledno. U biti, iz prve logističke jednadžbe za razvoj veličine *x*, mi možemo odrediti *x* kao funkciju od *t*, ali uvrštavanjem dobivenog rješenja u logističku jednadžbu za razvoj veličine *y* u prisutnosti veličine *x* dobiva se komplicirana diferencijalna jednadžba koja se može riješiti numerički, ali nije praktično. Zato se pristupa kvalitativnom opisu rješenja.

4. Primjeri modela suživota gdje jedna veličina ometa drugu u Mathematici

U ovom poglavlju je prikazano istraživanje provedeno u Mathematici. Popraćeno je grafičkim prikazima te objašnjeno i komentirano na temelju dobivenih rezultata. Istraživao se utjecaj parametara i početnih uvjeta na sudbinu dviju vrsta. Radi lakšeg objašnjenja i slikovitog predočavanja situacija, populacija jedne vrsta nazvana je "agresori", a druga "žrtve".

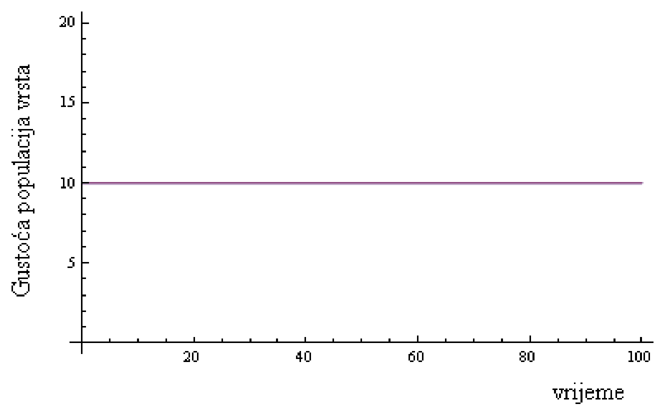
Što se tiče parametara, prvo imamo koeficijente a i b kao brzinu ili intenzitet razvoja ili razmnožavanja agresora, odnosno žrtve. Koeficijent c govori o napasnosti agresora, tj. na koliko jedinki žrtava ima utjecaj jedna jedinka agresora. Zatim imamo kapacitete K i L koji nam govore kolika je teoretska količina pojedine populacije do koje se ona može razmnožiti. Za agresore to vrijedi i u praksi jer žrtve nemaju nikakav utjecaj na njih, dok žrtve, logički zaključujemo, neće nikada ostvariti puni brojčani potencijal.

Na kraju imamo početne uvjete, x_o i y_o, koji označavaju početnu količinu agresora, odnosno žrtve. Razmatrat će se razvoj pojedinih varijabli pri fiksiranim parametrima u ovisnosti o njihovim početnim vrijednostima.

4.1. Primjer 1) Početno stanje sustava - ravnoteža

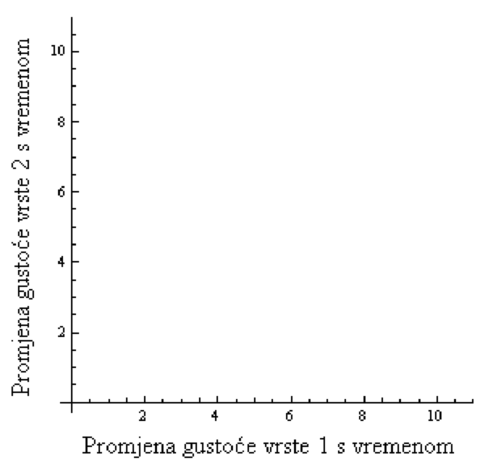
```
a := 0.1
b := 0.1
c := 0.1

K := 10
L := 11

f[x_, y_] := a * x[t] * (1 - x[t] / K)
g[x_, y_] := b * y[t] * (1 - y[t] / (L - c * x[t]))

x0 := 10
y0 := 10

tmax := 100

rjesenje := NDSolve[{x'[t] == f[x, y], y'[t] == g[x, y], x[0] == x0, y[0] == y0}, {x, y}, {t, 0, tmax}]

ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. rjesenje], {t, 0, tmax}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}]

velicinax := x[t] /. Flatten[rjesenje][[1]]
velicinay := y[t] /. Flatten[rjesenje][[2]]
Plot[Evaluate[{velicinax, velicinay}], {t, 0, tmax}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}]
```

Ovdje je prikazan kod u Mathematici odakle kreće istraživanje. Uočavamo da su brzine razmnožavanja agresora i žrtve potpuno jednake. Koeficijent c=0,1 nam govori da će čak 10 agresora biti potrebno za smanjenje kapaciteta žrtve za jednu jedinku. Nadalje vidimo da je kapacitet žrtve, L, za 1 veći od kapaciteta agresora, K. Početni broj agresora, x_o, jednak je njegovom kapacitetu, 10, što znači da se agresor ne može više brojčano razvijati. S obzirom da je početni broj žrtava, y_o, isto 10, ali kapacitet 11, žrtve imaju mogućnost stvaranja još jednog potomka, međutim taj jedanaesti odmah bude uklonjen zbog napasnosti tih 10 agresora. Kad bi bilo kako mijenjali intenzitet razmnožavanja bilo agresora, bilo žrtve, to ne bi imalo nikakavog utjecaja na ovo stanje. Agresora ne može nastati više nego što ih već ima zato jer su postigli svoj kapacitet i kojom god da se brzinom razmnožavaju, to neće promijeniti stvari. Slično vrijedi i za žrtve. Kolikom god brzinom da se razmnožavaju, 10 agresora svojom napasnošću uzrokuje nestanak jedne žrtve. Zato su u ravnoteži kapaciteti žrtava i agresora uvijek jednaki što možemo vidjeti na sljedećoj slici:



Kako vrijeme prolazi, broj obiju populacija se ne mijenja.

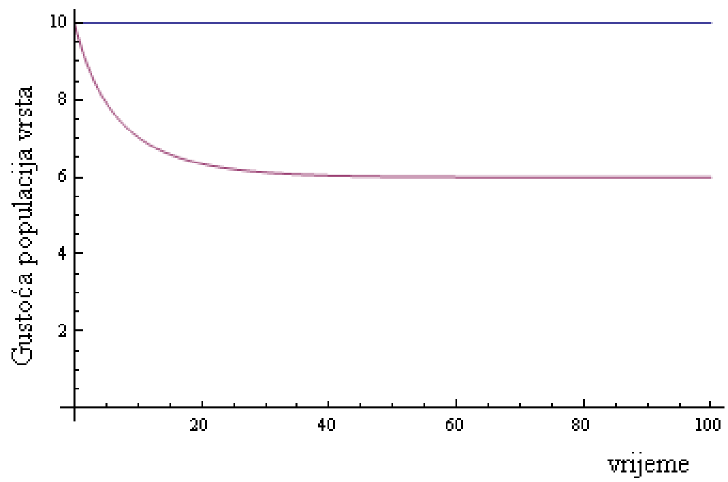
Slika koja slijedi govori o istoj ravnoteži samo na drugačiji način – nije prikazano vrijeme, nego samo promjene u gustoći vrsta s prolaskom vremena.



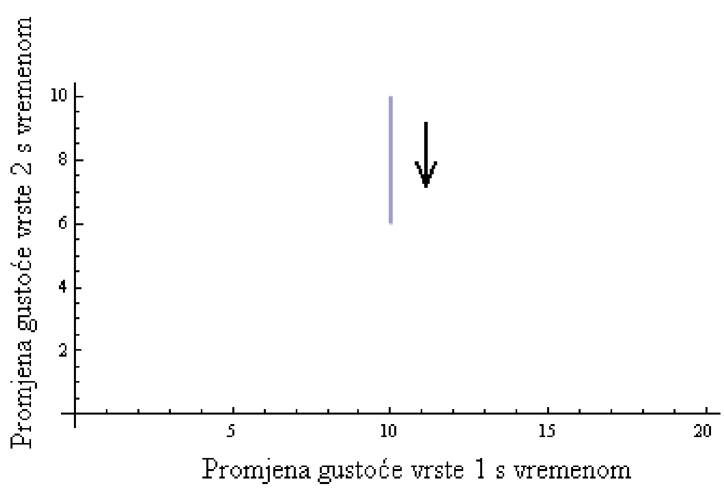
4.2. Primjer 2) Utjecaj koeficijenta *c*, odnosno utjecaj napasnosti agresora

Povećanje koeficijenta *c* možemo gledati kao na povećani utjecaj agresora na žrtve što rezultira većim smanjenjem kapaciteta žrtava; jedan agresor počinje utjecati na veći broj žrtava. U skladu s time, ravnoteža je postignuta kod manjeg iznosa za kapacitet žrtava. Svi drugi parametri ostaju isti kao u primjeru 1.

a) c=0,5

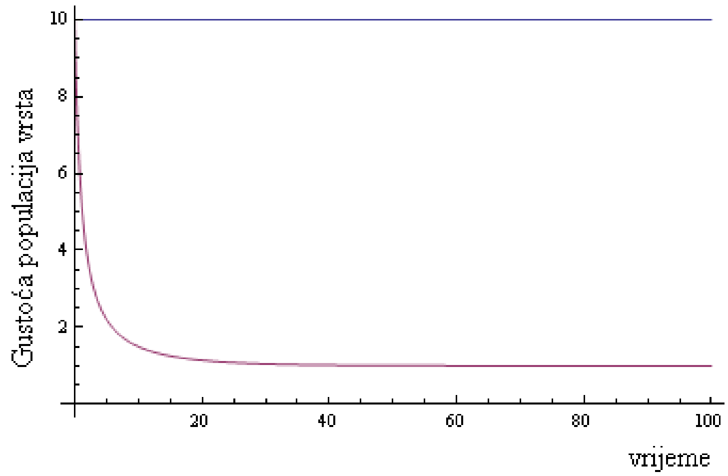


Na ovo slici jasno možemo vidjeti kako se, povećanjem napasnosti agresora (dva agresora utječu na smanjenje kapaciteta žrtve za jedan), s vremenom smanjuje kapacitet žrtava.

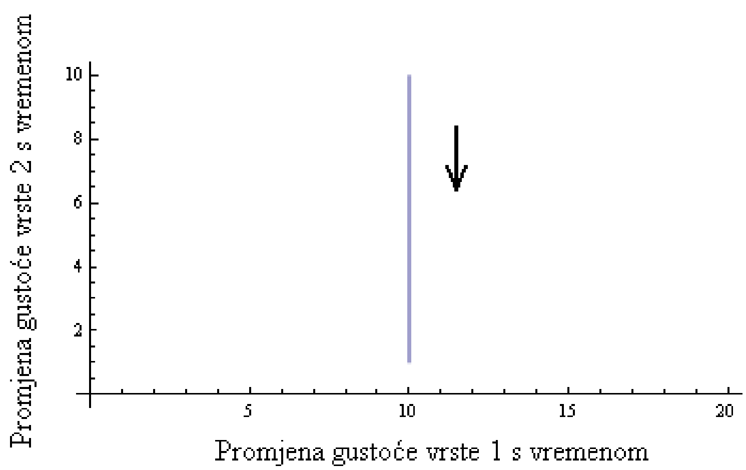


Ovdje lijepo možemo vidjeti kako se početan odnos broja jedinki vrsta s vremenom mijenja u svrhu postizanja ravnoteže. U početku je odnos bio 10:10, a u ravnoteži 10:6 u korist agresivaca.

b) c=1



Ova slika prikazuje situaciju koja se dogodi ako se utjecaj agresora na žrtvu još više poveća tako da jedan agresor utječe na smanjenje kapaciteta žrtve za jednu jedinku. Vidimo drastično snižen kapacitet žrtve.



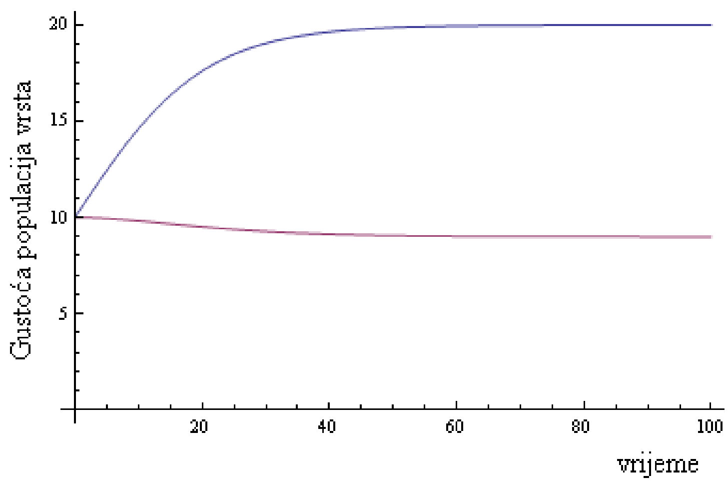
Ovdje jasno vidimo da se povećanjem utjecaja agresora na žrtvu došlo s početnog stanja gdje je odnos jedinki bio 10:10 u ravnotežno stanje gdje je omjer 10:1 u korist agresora.

Iz ova dva primjera lako možemo zaključiti da ukoliko koeficijent c, odnosno utjecaj agresora na žrtvu, dovoljno povećamo, s vremenom će populacija žrtve potpuno izumrijeti.

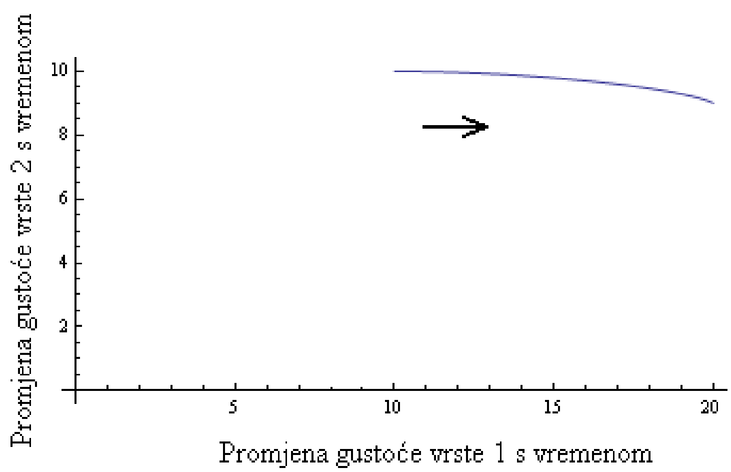
4.3. Primjer 3) Utjecaj parametra *K*, odnosno utjecaj kapaciteta agresora

Povećanje kapaciteta agresora direktno znači i njihovo brojčano povećanje. U skladu s time to znači da veći broj agresora na određeni način utječe na smanjenje kapaciteta žrtava. Svi ostali parametri ostaju isti kao u primjeru 1.

a) *K*=20

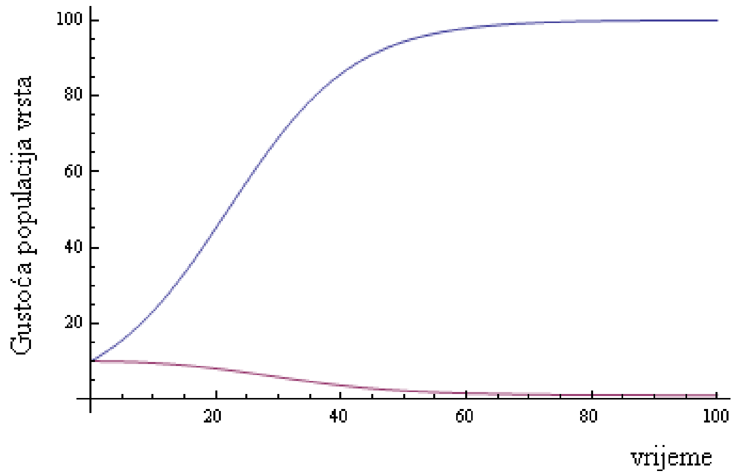


Ovdje možemo vidjeti što se dogodi u sustavu ako se zbog određenih razloga omogući razmnožavanje agresora za duplo. Veći broj agresora znači manji kapacitet žrtava.

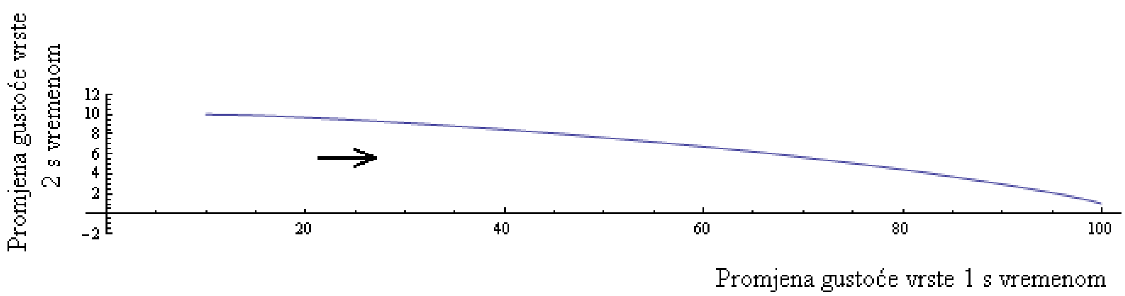


Na ovom grafu vidimo kako se s vremenom mijenja odnos agresora i žrtve s 10:10 na 20:8 u korist agresora. Ako 10 agresora smanjuje kapacitet žrtve za 1, logično je da će 20 agresora njihov kapacitet smanjiti za 2.

b) *K*=100



Ovo je situacija koja nastaje povećanjem kapaciteta agresora 10 puta. Vidimo jednu praktično nemoguću situaciju u kojoj sada agresori uništavaju 10 žrtava, onoliko koliko ih u biti i je, međutim nisu istrijebljeni nego kako nastaju, tako i nestaju.



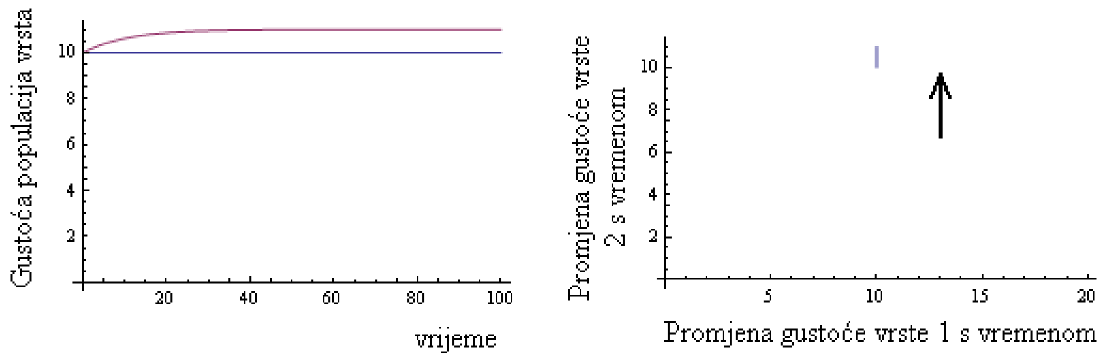
Na ovoj slici vidimo koliko se drastično situacija s početka promijenila u trenutku postizanja ravnoteže.

Iz ova dva primjera možemo zaključiti da povećanje kapaciteta agresora direktno utječe na kapacitet žrtve. Ako se *K* dovoljno poveća, kakvi god da su uvjeti i kako god da agresor malo utječe na žrtvu, neminovna situacija je izumiranje žrtve nakon nekog perioda vremena.

4.4. Primjer 4) Utjecaj parametra *L*, odnosno utjecaj kapaciteta žrtve

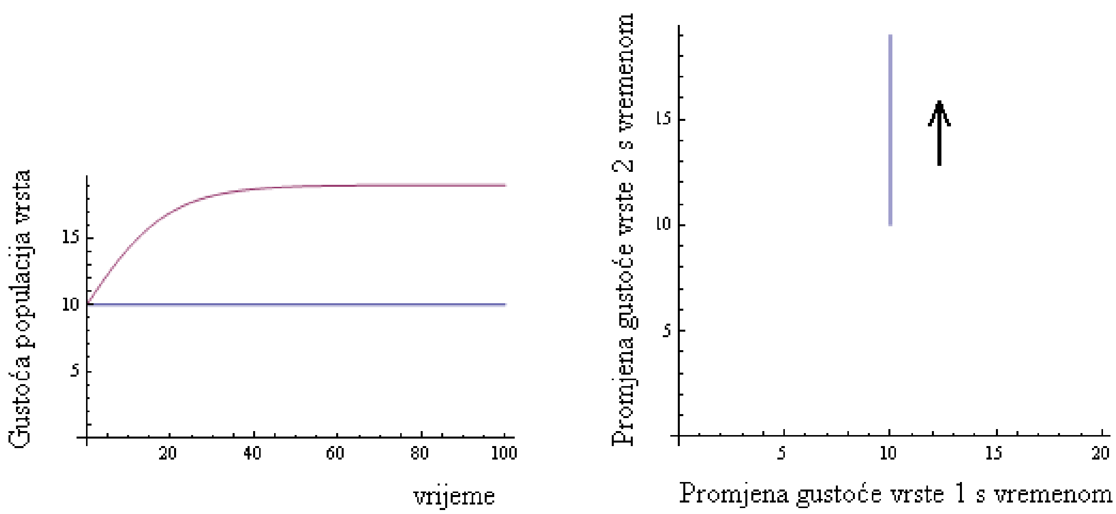
Ako se kojim slučajem poveća kapacitet žrtve, za njih to samo znači veća mogućnost preživljavanja. Zanimljivo je primjetiti da za razliku od agresora, žrtve nikad neće moći ostvariti puni kapacitet koliko god da se on poveća iz razloga što će uvijek 10 agresora ukloniti jednu žrtvu. Ostali parametri ostaju isti kao i u primjeru 1.

a) L=12



Povećanje kapaciteta žrtve samo utječe na njihov veći broj u sustavu.

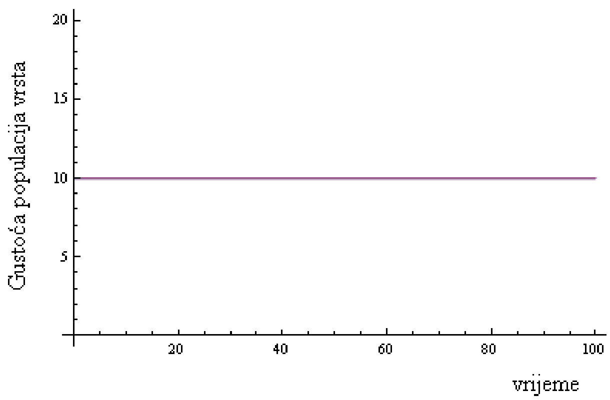
b) L=20

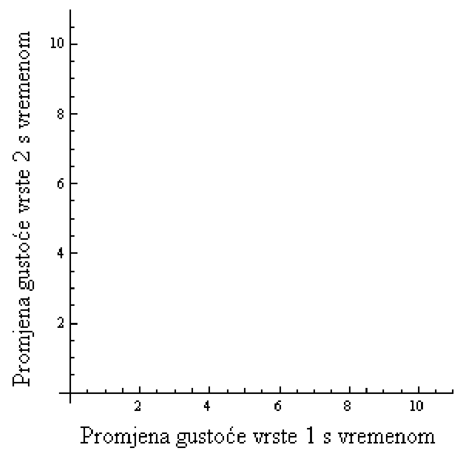


Na ovom primjeru možemo vidjeti kako se čak ni duplo povećanje kapaciteta žrtve ne može ostvariti jer će agresori uvijek utjecati na njihov kapacitet tako da se smanji za jednu jedinku.

Digresija:

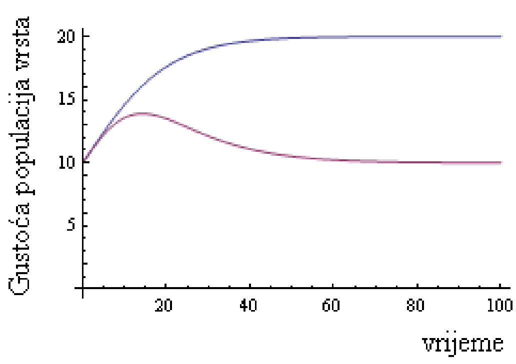
a) Međutim, ako agresorima zasmeta prečesto viđanje žrtava u svom okruženju, samo trebaju postati malo napasniji i ispunit će si svoju želju. Drugim riječima, ako povećamo koeficijent c s 0,1 na 1, opet dolazimo u ravnotežu kao u primjeru 1.

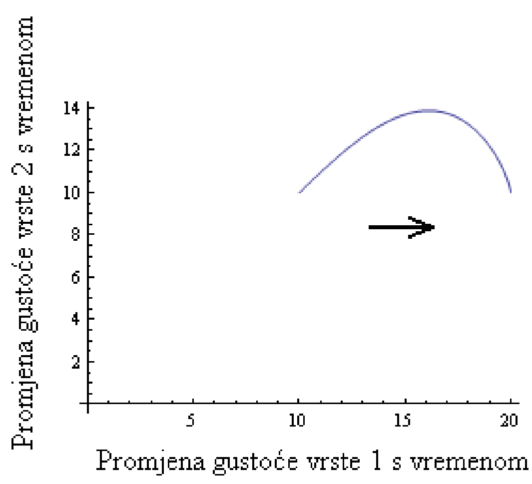




Povećani kapacitet žrtve se vrlo lako da izbalansirati povećanom napasnošću agresora.

b) Ako se iz nekog razloga poboljšaju uvjeti života na staništu te se kapaciteti obiju vrsta povećaju, K s 10 na 20, a L s 20 na 30, a napasnost agresora ostane ista, c=1, imamo sljedeću situaciju:



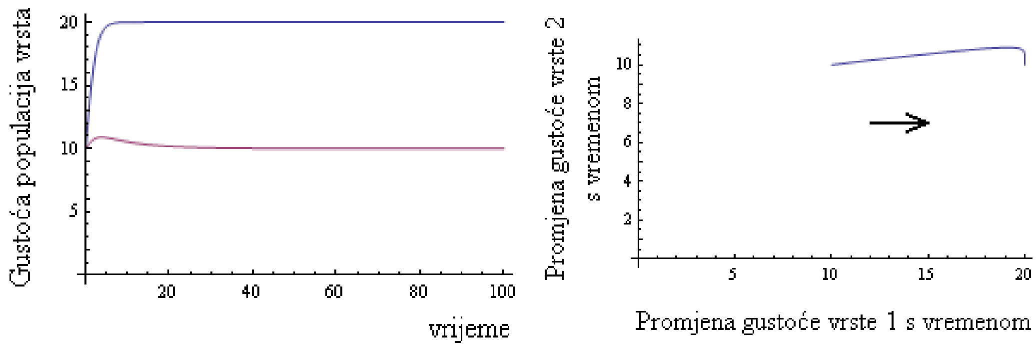


Iz ove dvije slike jasno možemo vidjeti kako su se obje vrste s poboljšanjem uvjeta za život počele razmnožavati, ali kad je broj agresora prešao određenu količinu, njihova napasnost je napravila svoje i kapacitet žrtava se počeo smanjivati.

4.5. Primjer 5) Utjecaji koeficijenata *a* i *b*, odnosno intenziteta razmnožavanja pojedinih vrsta

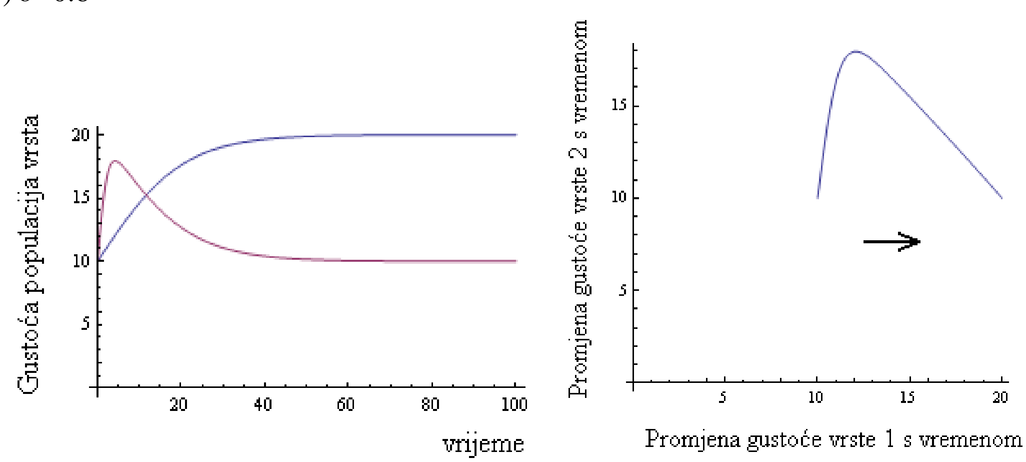
Na primjeru *Digresija* b) možemo jako dobro proučiti kako se stvari mijenjaju ukoliko se promijeni intenzitet razmnožavanja agresora (koeficijent *a*) ili žrtava (koeficijent *b*). Sve druge parametre i početne uvjete držimo istima.

a) *a*=0,8



Povećano razmnožavanje omogućuje agresorima da prije postignu svoj kapacitet pa će vremenski ranije više njih početi utjecati na kapacitet žrtve što direktno utječe i na njihov razvoj. To vidimo iz slabog povećanja njihovog kapaciteta i brzog dolaska do ravnotežnog kapaciteta.

b) *b*=0.8

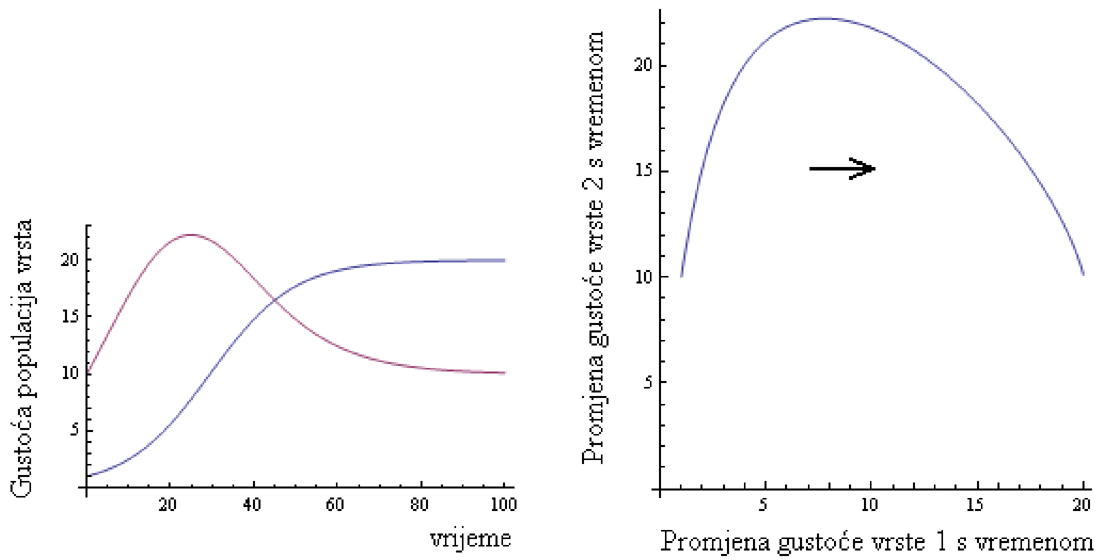


Povećano razmnožavanje žrtava ne utječe na konačni ishod, ali stvari se drugačije odvijaju u početku. Razmnožavanjem žrtava njihov broj naglo raste jer nema dovoljno agresora da im smetaju i smanje kapacitet, ali kako vrijeme prolazi, agresori se razviju i onda žrtve padaju na svoj ravnotežni kapacitet.

4.6. Primjer 6) Utjecaj početnih uvjeta, x_o i y_o, odnosno utjecaj početnog broja pojedinih vrsta

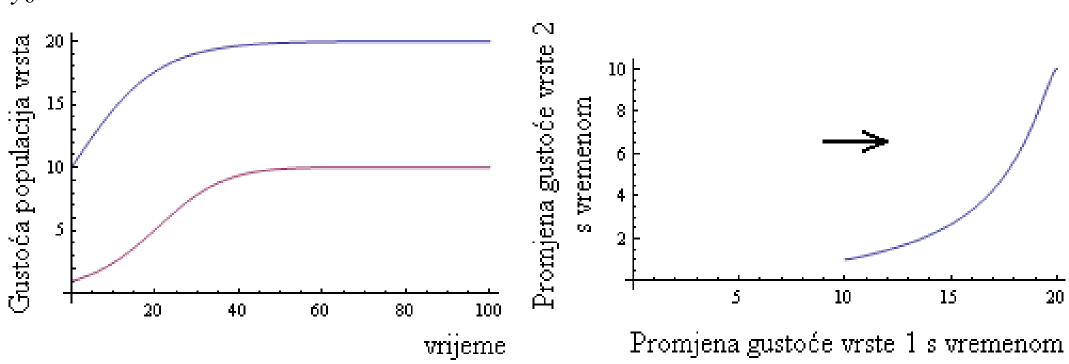
Sada kada smo proučili kako pojedini parametri utječu na razvoj populacija, trebamo vidjeti kako se sustav ponaša promjenom početnih uvjeta. Zadržavamo sve parametre kao u primjeru *Digresija* b).

a) x_o=1



Vidimo da je smanjeni broj agresora na kratko omogućio veći kapacitet žrtava i time direktno utjecao na rast kapaciteta žrtve u početku. Međutim, razmnožavanje agresora i njihova napasnost je kroz vrijeme napravilo svoje, a to je da su ih ipak brojčano nadvladali.i smanjili njihov kapacitet.

b) y_o=1



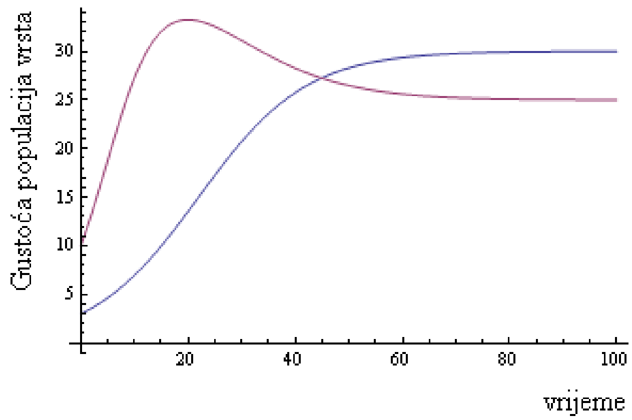
Brojčano manji start žrtava utječe samo tako da sporije dođu do svog mogućeg kapaciteta.

Na sljedećem primjeru imamo nove parametre koji su fiksirani, a jedino se mijenjaju početni uvjeti.

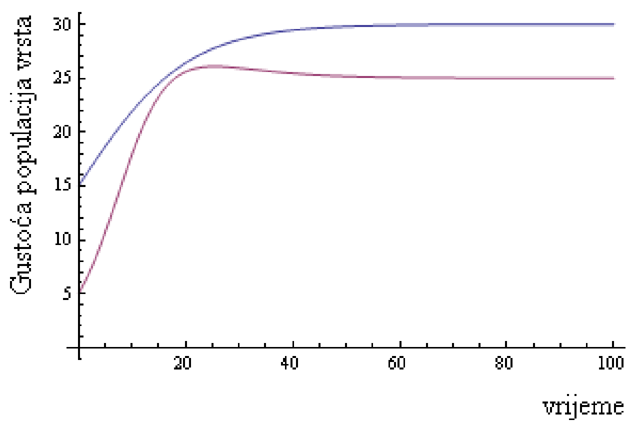
```
a := 0.1
b := 0.2
c := 0.5

K := 30
L := 40

f[x_, y_] := a * x[t] * (1 - x[t] / K)
g[x_, y_] := b * y[t] * (1 - y[t] / (L - c * x[t]))

x0 := 3
y0 := 10

x1 := 15
y1 := 5

x2 := 10
y2 := 20

tmax := 100

rjesenje := NDSolve[{x'[t] == f[x, y], y'[t] == g[x, y], x[0] == x0, y[0] == y0}, {x, y}, {t, 0, tmax}]
rjesenje1 := NDSolve[{x'[t] == f[x, y], y'[t] == g[x, y], x[0] == x1, y[0] == y1}, {x, y}, {t, 0, tmax}]
rjesenje2 := NDSolve[{x'[t] == f[x, y], y'[t] == g[x, y], x[0] == x2, y[0] == y2}, {x, y}, {t, 0, tmax}]

ParametricPlot[
 Evaluate[{Evaluate[{x[t], y[t]} /. rjesenje], Evaluate[{x[t], y[t]} /. rjesenje1],
   Evaluate[{x[t], y[t]} /. rjesenje2]}], {t, 0, tmax}, AxesOrigin → {0, 0}]

velicinax := x[t] /. Flatten[rjesenje][[1]]
velicinay := y[t] /. Flatten[rjesenje][[2]]
Plot[Evaluate[{velicinax, velicinay}], {t, 0, tmax}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}]

velicinax := x[t] /. Flatten[rjesenje1][[1]]
velicinay := y[t] /. Flatten[rjesenje1][[2]]
Plot[Evaluate[{velicinax, velicinay}], {t, 0, tmax}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}]

velicinax := x[t] /. Flatten[rjesenje2][[1]]
velicinay := y[t] /. Flatten[rjesenje2][[2]]
Plot[Evaluate[{velicinax, velicinay}], {t, 0, tmax}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}]
```

Ovdje vidimo kompletan kod u programu Mathematica koji će nam dati željene rezultate.

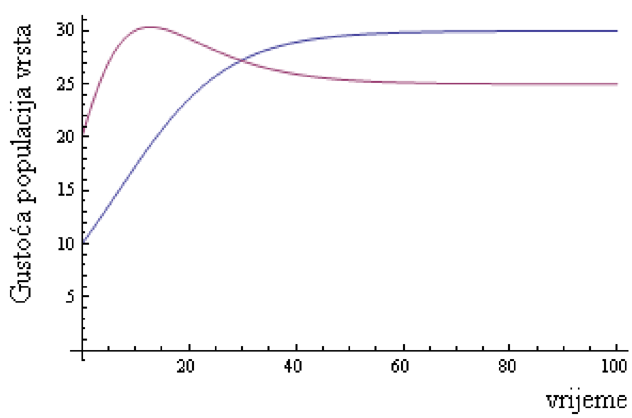
Dobiveni grafički rezultati su sljedeći:



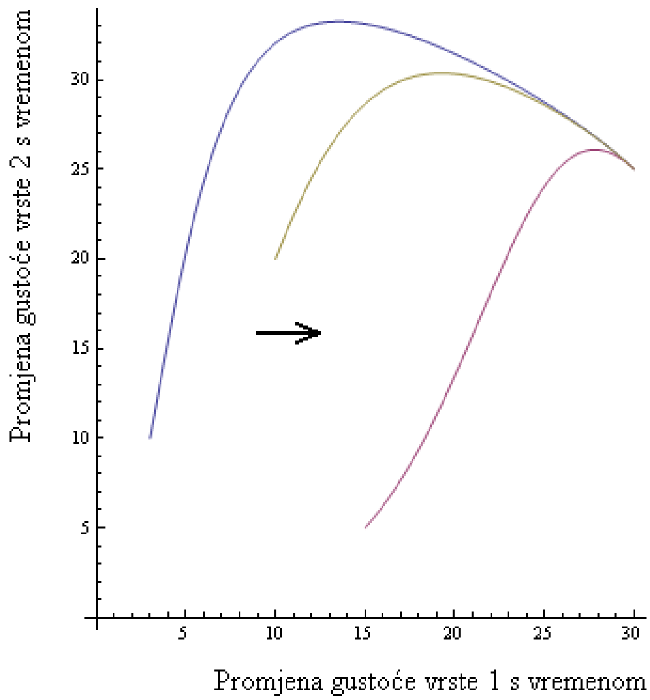
Promjena kapaciteta populacija s početnim uvjetima x_0=3, y_0=10



Promjena kapaciteta populacija s početnim uvjetima x_0=15, y_0=5



Promjena kapaciteta populacija s početnim uvjetima x_0=10, y_0=20



Ova slika nam govori da su ipak parametri sustava ti koji određuju smjer razvoja populacija i koji s vremenom sustav dovedu u konačnu ravnotežu. Svaka krivulja pokazuje smjer kojim se određeni sustav kretao prema ravnotežnom stanju u ovisnosti o početnim uvjetima.

ZAKLJUČAK

Ovaj model je krajnje jednostavan i razumljiv te više ili manje pouzdan u nekim situacijama. Zato je prilično zahvalan za korištenje pri jednostavnijim situacijama i manje kompliciranim odnosima između dvije varijable. Pretpostavke modela su da su dvije populacije različitih vrsta potpuno izolirane od ostatka svijeta, a međuodnos im je takav da jedna vrsta utječe na drugu redukcijom njenog nosivog kapaciteta, dok ova druga na prvu ne utječe uopće. Modeliranje ovakvih međudjelovanja omogućuje predviđanje ishoda ovisno o različitim faktorima kao što su početni broj jedinki pojedine vrste, kapacitet svake vrste i jačina utjecaja „agresivne“ vrste na ovu drugu.

LITERATURA

1) http://elgrunon.wordpress.com/2007/04/18/mala-povijest-deterministickog-kaosa-iii/

2) http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_systems_theory

3) http://www.inet.hr/~ivnakic/kaos/2-1-Uvod_u_kaoticne_sustave.htm

4) Damir Marinić; Teorije dinamičkih sustava kao metateorijski okvir za istraživanja ličnosti; pregledni rad; Osijek 2008

5) Petra Sabljić; Diskretni dinamički sustavi – logistički model, Kaos; seminarski rad; Zagreb 2009

6) Dr. sc. Ivica Gusić; Uvod u matematičke metode u inženjerstvu; predavanja s Fakulteta kemijskog inženjerstva i tehnologije u Zagrebu